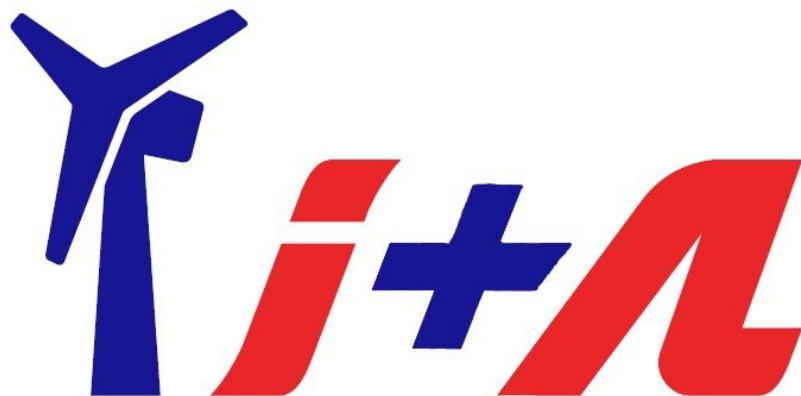


**GRADO EN INGENIERÍA DE
TELECOMUNICACIONES**

COLECCIÓN DE EXÁMENES

1^{er} curso



Academia de Ingenierías y Arquitectura

Desde 1998 ayudándote en tus estudios



JAVA. ING. TELECOMUNICACIONES EXAMEN 17 ENERO 2023

Ejercicio 1

La FIFA quiere realizar en España una competición internacional y para ello busca un campo de fútbol que sea lo más grande (en términos de superficie) posible. En las normas de la FIFA está especificado que para que un campo de fútbol sea apto para partidos internacionales sus dimensiones deben estar entre las siguientes:

- Longitud: entre 100-110 metros
- Ancho: entre 64-75 metros

Para realizar este programa se dispone de un fichero de texto **estadios.txt** que en cada línea contiene las dimensiones de un estadio (se desconoce a priori la cantidad de estadios que hay en el fichero). Cada línea del fichero incluye el nombre del estadio (1 palabra), la longitud del mismo (en metros), y la anchura del mismo (en metros). A continuación se muestra un fragmento del fichero.

Fragmento del fichero estadios.txt:

```
Romareda 107 68
Mestalla 105 68
Vicente_Calderon 105 68
Benito_Villamarín 107 64
```

Desarrolla un programa en JAVA que muestre por pantalla los estadios de fútbol (nombre, largo y ancho, separados por espacios en blanco) más grandes de España que son válidos para competiciones internacionales (puede haber varios estadios con el mismo tamaño máximo). Para realizar este programa tienes que completar la clase **Estadio** indicada a continuación (debes rellenar las secciones marcadas con ???). El resto del programa a desarrollar (main y funciones adicionales) debe ir en una segunda clase llamada **AnálisisEstadios**. El código creado dentro de la clase **AnálisisEstadios** tendrá que usar adecuadamente variable(s) de tipo **Estadio** para resolver el problema.

```
public class Estadio {
    //Atributos de la clase
    ???

    //Constructor, se le pasa cierta información e inicializa los atributos
    public Estadio (???) {
        ???
    }

    //devuelve la superficie del estadio
    public ??? superficie() {
        ???
    }

    //devuelve true si el estadio cumple las condiciones para ser
    //internacional, en otro caso devuelve false
    public boolean esInternacional() {
        ???
    }
}
```

```

        //devuelve una representación como cadena de texto de un estadio
        public String toString(){
            ???
        }
    }
}

```

Ejercicio 1

```

public class Estadio {
    //Atributos de la clase
    String nombre;
    int longitud;
    int anchura;

    //Constructor, se le pasa cierta información e inicializa los atributos
    public Estadio(String _nombre, int _longitud, int _anchura) {
        nombre = _nombre;
        longitud = _longitud;
        anchura = _anchura;
    }
    //devuelve la superficie del estadio
    public int superficie(){
        return longitud*anchura;
    }
    //devuelve true si el estadio cumple las condiciones para ser
    //internacional, en otro caso devuelve false
    public boolean esInternacional(){
        return longitud>=100 && longitud<=110 && anchura >=64 && anchura<=75;
    }
    //devuelve una representación como cadena de texto de un estadio
    public String toString() {
        return "Nombre=" + nombre + '\n' +
            "Longitud=" + longitud + '\n' +
            "Anchura=" + anchura + '\n';
    }
}
AnalisisEstadios.java

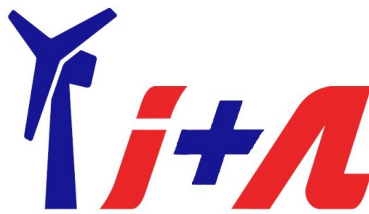
```

```

import java.io.File;
import java.util.Scanner;

public class AnalisisEstadios {
    public static int contarEstadios(String nombreFichero){
        int cont=0;
        try{
            Scanner fin = new Scanner(new File(nombreFichero));
            String linea;
            while(fin.hasNextLine()){
                linea=fin.nextLine();
                cont++;
            }
            fin.close();
        }catch (Exception e){
            System.out.println("Error al abrir el fichero");
        }
        return cont;
    }
}

```



```
public static Estadio[] leerEstadios(String nombreFichero){
    int num_estadios= contarEstadios(nombreFichero);
    Estadio estadios[] = new Estadio[num_estadios];
    try{
        Scanner fin = new Scanner(new File(nombreFichero));
        for (int i = 0; i < estadios.length; i++) {
            estadios[i]=new Estadio(fin.next(),fin.nextInt(), fin.nextInt());
        }
        fin.close();
    }catch (Exception e){
        System.out.println("Error al abrir el fichero");
    }
    return estadios;
}

public static int primerEstadioInternacional(Estadio estadios[]){
    //Busco un estadio internacional
    int i=0;
    boolean encontrado = false;
    while(!encontrado && i<estadios.length){
        if(estadios[i].esInternacional()) {encontrado=true;}
        else{ i++;}
    }
    if(encontrado) return i;
    else return -1;
}

public static void main(String[] args) {
    Estadio estadios[] = leerEstadios("estadios.txt");
    int pos_max=primerEstadioInternacional(estadios);
    if(pos_max == -1) {
        System.out.println("No existe ningun estadio que cumpla las
características");
    }else{
        for (int i=0; i<estadios.length;i++){
            if(estadios[i].superficie() > estadios[pos_max].superficie()){
                pos_max=i;
            }
        }
        //Puede haber mas de un máximo, muestro todos
        System.out.println("MAYORES ESTADIOS INTERNACIONALES");
        for (int i = 0; i < estadios.length; i++) {
            if(estadios[i].superficie() == estadios[pos_max].superficie()){
                System.out.println(estadios[i].toString());
            }
        }
    }
}
```

Ejercicio 2

Algunos números naturales cumplen la siguiente propiedad: la suma de cualesquiera dos dígitos **adyacentes** del número da como resultado un número primo.

Por ejemplo:

- 123 cumple esa propiedad, porque $1 + 2 = 3$ y $2 + 3 = 5$, y 3 y 5 son primos.
- 6114 cumple esa propiedad, porque $6 + 1 = 7$, $1 + 1 = 2$ y $1 + 4 = 5$, y 7, 2 y 5 son primos.
- 512 no cumple esa propiedad, porque $5 + 1 = 6$ y $1 + 2 = 3$, y 6 no es primo.

Se pide: desarrollar un programa en Java que muestre por pantalla todos los números que cumplan con esta propiedad y sean menores o iguales que un número natural N introducido por teclado. Se considerará que los números menores de 10 (números de un dígito) no cumplen la propiedad. Los números se mostrarán por pantalla separados por espacios en blanco.

Nota: No se permite usar vectores ni datos de tipo String.

Ejercicio 2

```
import java.util.Scanner;
```

```
public class Ejercicio1_Feb19 {  
  
    public static boolean esPrimo(int n){  
        boolean primo = true;  
        int i=2;  
        while(primo && i<n){  
            if(n%i==0) {primo = false;}  
            i++;  
        }  
        return primo;  
    }  
  
    public static boolean cumpleSumaAdyacentes(int n){  
        if(n<10) {return false;}  
        else{  
            boolean cumple=true;  
            int c1=n%10,c2;  
            n=n/10;  
            while (n>0){  
                c2=n%10;  
                n=n/10;  
                if(!esPrimo(c1+c2)){cumple=false;}  
                c1=c2;  
            }  
            return cumple;  
        }  
    }  
  
    public static void main(String[] args) {  
        Scanner input = new Scanner(System.in);  
        int n;  
        do{  
            System.out.print("Introduce un número:");  
            n= input.nextInt();  
        }while(n <=0);  
  
        for (int i = 1;i <=n; i++){  
            if(cumpleSumaAdyacentes(i)) {  
                System.out.println("El número " + i+ " cumple las condiciones");  
            }  
        }  
    }  
}
```

Ejercicio 3

En el juego del Conecta-4 se usa un tablero vertical en el que se añaden fichas por la parte superior que caen sus posiciones por efecto de la gravedad. Los jugadores añaden una ficha de su color en su turno a la columna que deseen y el juego acaba cuando uno de los jugadores obtiene una fila, columna o diagonal con 4 fichas seguidas de su color.

Supón que se usa una matriz 6x7 para representar el tablero del juego. En esa matriz, 0 representa una casilla vacía, 1 indica una ficha de color rojo y 2 una ficha de color amarillo.

Crea una función en Java llamada “comprobarGanador” a la que se le pase como parámetro un tablero. La función debe devolver 0 si no hay ganador, 1 si gana el jugador rojo y 2 si gana el jugador amarillo.

Se recomienda crear una función adicional, “comprobarCasilla”, que tome como parámetros el tablero, una fila y una columna y compruebe si hay 4 fichas del mismo color en línea (o sea, un ganador) partiendo de dicha casilla. La función “comprobarGanador” utilizará “comprobarCasilla”.

Ejercicio 3

```
public static int comprobarCasilla(int[][] tablero, int f, int c){
    int actual = tablero[f][c];
    if(actual==0) return 0;
    //En horizontal a la derecha
    if(c+3<tablero[0].length && tablero[f][c+1] == actual && tablero[f][c+2] == actual
    && tablero[f][c+3] == actual){
        return actual;
    }
    //Diagonal hacia abajo izquierda
    if(f+3<tablero.length && c-3<tablero[0].length && tablero[f+1][c-1] == actual &&
    tablero[f+1][c-2] == actual
    && tablero[f+3][c-3] == actual){
        return actual;
    }
    //Vertical hacia abajo
    if(f+3<tablero.length && tablero[f+1][c] == actual && tablero[f+2][c] == actual &&
    tablero[f+3][c] == actual){
        return actual;
    }
    //Diagonal hacia abajo derecha
    if(f+3<tablero.length && c+3<tablero[0].length && tablero[f+1][c+1] == actual &&
    tablero[f+2][c+2] == actual
    && tablero[f+3][c+3] == actual){
        return actual;
    }
    return 0; //Si no hay ninguna linea devuelve 0
}

public static int comprobarGanador(int[][] tablero){
    int ganador=0;
    for (int i = 0; i < tablero.length; i++) {
        for (int j = 0; j < tablero[i].length; j++) {
            int casilla = comprobarCasilla(tablero,i,j);
            if(casilla != 0) ganador=casilla;
        }
    }
    return ganador;
}
```

FÍSICA. ING. TELECOMUNICACIONES

EXAMEN 17 ENERO 2025

M1. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s y, en presencia de un viento que sopla en la dirección horizontal produciendo una aceleración, también horizontal, de 1 m/s.

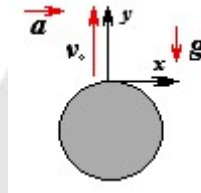
a) Determinar las componentes cartesianas de aceleración, velocidad y posición de la pelota para cualquier valor de t .

Solución:

MRUA:

$$\begin{aligned} \text{En el eje } x: \quad & \begin{cases} v_x = v_{0x} + a_x t \\ x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = t \\ x = \frac{1}{2} t^2 \end{cases} \\ \text{En el eje } y: \quad & \begin{cases} v_y = v_{0y} + a_y t \\ y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_y = 20 - gt \\ y = 20t + \frac{1}{2} gt^2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto, } \begin{cases} a_x = 1 \\ a_y = -g \end{cases}, \begin{cases} v_x = t \\ v_y = 20 - gt \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{1}{2} t^2 \\ y = 20t + \frac{1}{2} gt^2 \end{cases}$$



b) Calcular las componentes intrínsecas de la aceleración y el radio de curvatura de la trayectoria en $t = 3s$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{La aceleración tangencial, } a_T &= \vec{a} \cdot \hat{u}_T \text{ siendo } \hat{u}_T = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \\ \text{Para } t = 3s: \quad & \begin{cases} v_x = 3 \text{ m/s} \\ v_y = (20 - 3 \cdot 9.8) \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{9 + \left(-\frac{47}{5}\right)^2} \text{ m/s} = 9.87 \text{ m/s} \\ \hat{u}_T &= \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\left(3, -\frac{47}{5}\right)}{9.87} = \left(\frac{3}{9.87}, -\frac{47}{5 \cdot 9.87}\right) \text{ y } \vec{a} = (1, -9.8) \\ a_T &= \vec{a} \cdot \hat{u}_T = \left(\frac{3}{9.87}, -\frac{47}{5 \cdot 9.87}\right) \cdot (1, -9.8) \text{ m/s}^2 = 9.64 \text{ m/s}^2 \\ a &= \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \Leftrightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} \text{ y } a = |\vec{a}| = \sqrt{1 + 9.8^2} \text{ m/s}^2 = \sqrt{97.04} \text{ m/s}^2 \\ a_N &= \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{97.04 - 92.93} \text{ m/s}^2 = 2.027 \text{ m/s}^2 \\ R &= \frac{v^2}{a_N} = \frac{9.87^2}{2.027} \text{ m} = 48 \text{ m} \end{aligned}$$

Radio de curvatura,

M2. Un péndulo con longitud $L = 0.5 \text{ m}$ y masa $m = 10 \text{ g}$, se lanza desde un ángulo de 10° con una velocidad tangencial hacia abajo de 1 m/s .

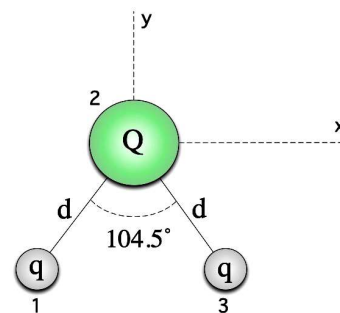
Escribe la expresión de su desplazamiento angular calculando la frecuencia, la amplitud máxima y la fase inicial del movimiento.

Solución:

$$\text{La expresión del desplazamiento angular, } \theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \text{ siendo } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

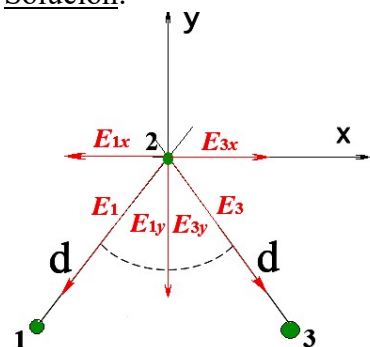
E1. Una molécula de agua se puede esquematizar como un sistema de tres cargas puntuales dispuestas como se indica en la figura. La carga Q de la partícula más grande es negativa y su módulo el doble de la carga q de las otras dos.

Si $q = +1'6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $d = 95'8 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ y el ángulo que forman $\theta = 104'5^\circ$, calculad las componentes del campo eléctrico en los puntos indicados:



a) En la posición donde está Q (debido a las dos cargas q)

Solución:



$$= -1'92 \cdot 10^{11} \hat{j} (\text{N/C})$$

Por el principio de superposición, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_3$

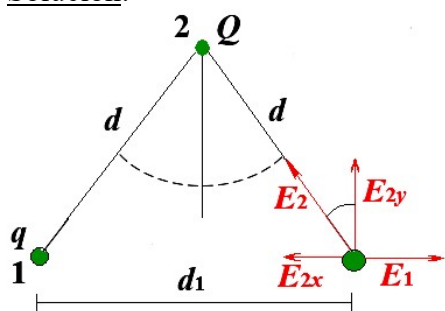
$$\vec{E} = -2E_1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{j}$$

$$\vec{E} = -2K \frac{q}{d^2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{j}$$

$$= -2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{1'6 \cdot 10^{-9}}{(95'8 \cdot 10^{-12})^2} \cos\left(\frac{104'5}{2}\right) \hat{j} (\text{N/C})$$

b) En la posición de la q de la derecha, (creado por las otras dos cargas).

Solución:



Por el principio de superposición, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$\vec{E} = (E_1 - E_{2x}) \hat{i} + E_{2y} \hat{j}$$

$$\vec{E} = K \left(\frac{q}{d_1^2} - \frac{Q}{d^2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \hat{i} + K \frac{Q}{d^2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{j}$$

$$d_1 = 2d \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Siendo

$$\vec{E} = K \left(\frac{q}{\left(2d \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2} - \frac{Q}{d^2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \hat{i} + K \frac{Q}{d^2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{j}$$

$$\vec{E} = \frac{Kq}{d^2} \left(\frac{1}{4 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} - 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \hat{i} + K \frac{2q}{d^2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{j}$$

$$\vec{E} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1'6 \cdot 10^{-19}}{(95'8 \cdot 10^{-12})^2} \left(\frac{1}{4 \sin^2(52'25^\circ)} - 2 \sin(52'25^\circ) \right) \hat{i} + 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 1'6 \cdot 10^{-19}}{(95'8 \cdot 10^{-12})^2} \cos(52'25^\circ) \hat{j}$$

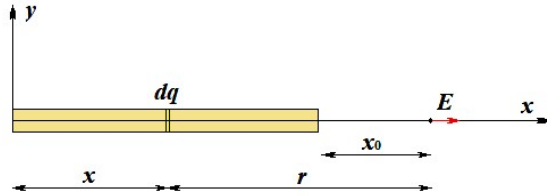
$$\vec{E} = -1'85 \cdot 10^{11} \hat{i} + 1'92 \cdot 10^{11} \hat{j}$$

E2. Se tiene una barra (segmento rectilíneo) cargada con una densidad lineal λ y de longitud L . La barra está alineada a lo largo del eje X . Calculad el campo eléctrico para $x > L$.

Solución:

Campo eléctrico creado por un hilo delgado recto y cargado en puntos de su eje.

Datos: densidad lineal, λ ; distancia al punto, x_0 y longitud de la varilla L



$$d\vec{E} = K \frac{dq}{r^2} \hat{i}$$

Teniendo en cuenta que:

$$dq = \lambda dx \quad \text{y} \quad r = L + x_0 - x$$

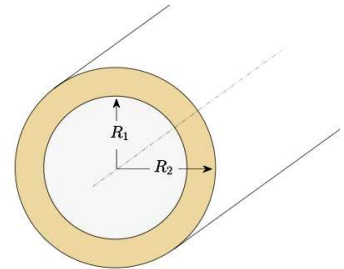
$$E = K \int \frac{dq}{r^2} = K \int_0^L \frac{\lambda dx}{(L + x_0 - x)^2} = K \lambda \left(\frac{1}{L + x_0 - x} \right) \Big|_0^L = K \lambda \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{L + x_0} \right) = K \lambda \frac{L}{x_0(L + x_0)}$$

$$\vec{E} = K \lambda \frac{L}{x_0(L + x_0)} \hat{i}$$

$$\vec{E} = \frac{KQ}{x_0(L + x_0)} \hat{i}$$

Si el dato hubiera sido la carga,

E3. La figura representa un cable coaxial formado por un conductor de plata rodeado por un recubrimiento de cobre. El cable tiene una longitud de 1m y los radios respectivos son $R_1=1\text{mm}$ y $R_2=1,2\text{mm}$. La corriente circula de modo longitudinal a lo largo del cable y el sistema está sometido a una diferencia de potencial de 10mV entre sus extremos.



Datos: $\rho_{Cu} = 1'71 \cdot 10^{-8} \Omega m$, $\rho_{Ag} = 1'59 \cdot 10^{-8} \Omega m$

Calculad:

- a) La resistencia del hilo de plata y del cobre por separado y la potencia que se consume en cada uno de ellos.

Solución:

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

La resistencia de un hilo cuya corriente circula de modo longitudinal,

$$R_{Ag} = \rho_{Ag} \frac{L}{\pi R_1^2} = 1'59 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\pi \cdot 0'001^2} \Omega = 5'06 \cdot 10^{-3} \Omega ;$$

$$R_{Cu} = \rho_{Cu} \frac{L}{\pi (R_2^2 - R_1^2)} = 1'71 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\pi (0'0012^2 - 0'001^2)} \Omega = 12'37 \cdot 10^{-3} \Omega$$

$$\text{Ley de Ohm: } V = IR \quad \text{y el potencial es} \quad P = IV = \frac{V^2}{R}$$

$$P_1 = \frac{V^2}{R_1} = \frac{0'01^2}{5'06 \cdot 10^{-3}} W \cong 20mW \quad \text{y} \quad P_2 = \frac{V^2}{R_2} = \frac{0'01^2}{12'37 \cdot 10^{-3}} W \cong 8mW$$

- b) La resistencia del hilo compuesto, teniendo en cuenta que la corriente total se reparte entre ambos, y que la diferencia de potencial entre extremos es la misma (10mV)

Solución:

Están en paralelo, $V = V_1 = V_2 = 0'01V$

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{5'06 \cdot 10^{-3} \cdot 12'37 \cdot 10^{-3}}{5'06 \cdot 10^{-3} + 12'37 \cdot 10^{-3}} \Omega = \frac{5'06 \cdot 12'37 \cdot 10^{-3}}{(5'06 + 12'37) \cdot 10^{-3}} \Omega = 3'6 \cdot 10^{-3} \Omega$$

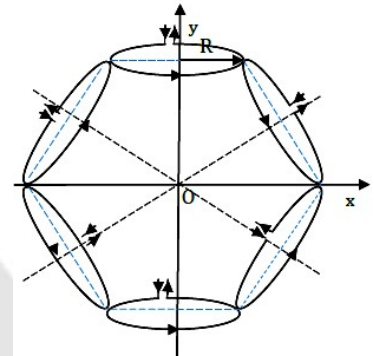
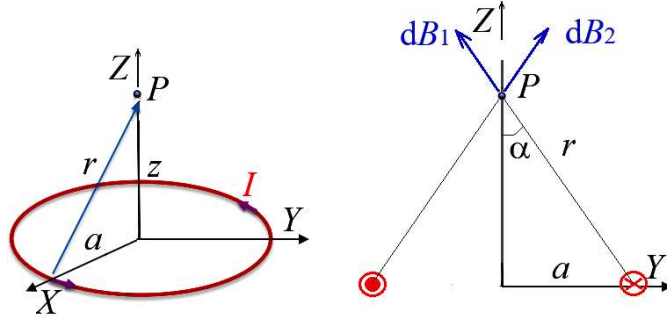
En paralelo

Ma1. Se tiene un conjunto de seis espiras con radio R , recorridas por la misma corriente I , dispuestas como en la figura, formando un hexágono regular.

a) Obtener el campo debido a una sola de ellas en su eje.

Solución:

Campo magnético de una espira circular de radio a a una distancia z de su eje



Por simetría, las componentes y del campo se anulan y $dB_z = dB \sin \alpha$

$$dB_z = dB \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{L} \times \vec{r}}{r^3} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl r \sin 90^\circ}{r^3} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl a}{r^2} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I a dl}{4\pi r^3} \sin \alpha$$

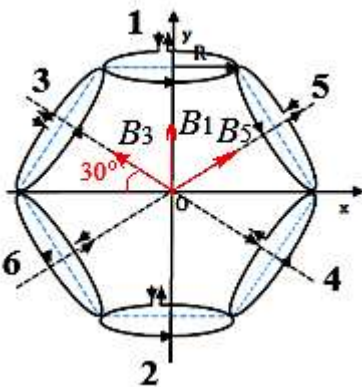
$$B_z = \int dB_z = \frac{\mu_0 I a}{4\pi (a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi a} dl = \frac{\mu_0 I a}{4\pi (a^2 + z^2)^{3/2}} 2\pi a = \frac{\mu_0 I a^2}{2 (a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2 (a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Por lo tanto,

b) Calcular el campo debido a todo el conjunto en su centro O.

Solución:



$$\vec{B}_1 = \vec{B}_5 = \frac{\mu_0 I R^2}{2 (R^2 + d^2)^{3/2}} \hat{j}$$

siendo

$$\tan 30^\circ = \frac{R}{d} \Leftrightarrow d = \frac{R}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}R, \text{ ya que } \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_5 = \frac{\mu_0 I R^2}{2 (R^2 + 3R^2)^{3/2}} \hat{j} = \frac{\mu_0 I R^2}{2^4 R^3} \hat{j} = \frac{\mu_0 I}{2^4 R} \hat{j}$$

$$\vec{B}_3 = \vec{B}_4 \text{ y } \vec{B}_5 = \vec{B}_6$$

Las componentes x se anulan, y las componentes y se suman, es decir:

$|B_{3x}| = |B_{5x}|$ pero de signo contrario y $|B_{3y}| = |B_{5y}|$ del mismo signo

$$\vec{B}_0 = 2\vec{B}_2 + 4B_{3y} = 2\frac{\mu_0 I}{2^4 R} \hat{j} + 4\frac{\mu_0 I}{2^4 R} \text{sen}30^\circ \hat{j} = \frac{\mu_0 I}{4R} \hat{j}$$

Ma2. Un hilo de sección cuadrada ($d \times d$) es atravesado por una corriente de intensidad $I = 2 \text{ A}$.

Está en presencia de un campo magnético vertical de magnitud $B = 1 \text{ T}$.

Hallad la diferencia de potencial que medirá un voltímetro colocado como indica la figura.

Datos: $d = 1 \text{ mm}$, $n = 10^{28} \text{ portadores/m}^3$ y $q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

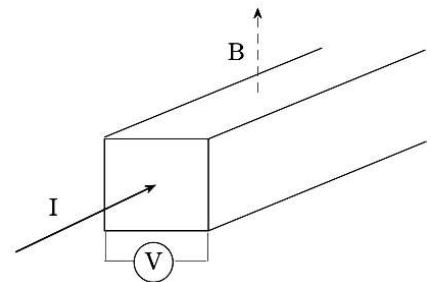
Solución:

Efecto Hall

$$F_e = F_M \Rightarrow qE = qvB \Leftrightarrow E = vB$$

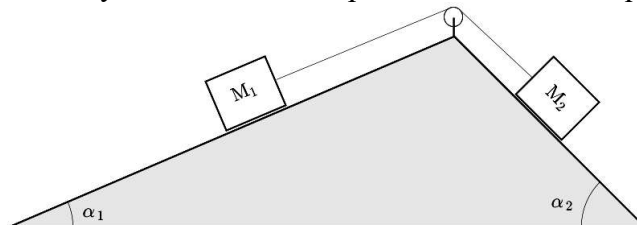
La densidad de corriente, $J_x = nqv$

$$J_x = nqv \Leftrightarrow n = \frac{J}{qv} = \frac{I}{d^2 q} \frac{B}{E} = \frac{I}{d^2 q} B \frac{d}{V_H} \Leftrightarrow V_H = \frac{IB}{ndq} = \frac{2 \cdot 1}{10^{28} \cdot 0.001 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} \text{ V} = 1.25 \mu\text{V}$$



PROBLEMAS

1. La figura muestra dos bloques que se apoyan sobre sendos planos inclinados, con los ángulos $\alpha_1 = 30^\circ$ y $\alpha_2 = 45^\circ$, unidos por una cuerda ideal que pasa por una polea.

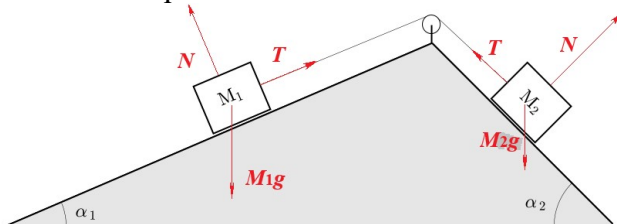


Suponiendo que no existe fricción entre los bloques y los planos:

a) Encontrad la relación entre las masas (M_2 / M_1) para que el sistema permanezca en equilibrio

Solución:

Las fuerzas que actúan sobre el sistema



El sistema permanece en equilibrio, $\sum \vec{F} = \vec{0}$

$$\begin{cases} M_1 g \operatorname{sen} \alpha_1 - T = 0 \\ T - M_2 g \operatorname{sen} \alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_2 g \operatorname{sen} \alpha_2 = T \\ M_1 g \operatorname{sen} \alpha_1 = T \end{cases} \Leftrightarrow \frac{M_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{M_1 \operatorname{sen} \alpha_1} = 1 \Leftrightarrow \frac{M_2}{M_1} = \frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha_2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) Suponiendo que las dos masas fuesen iguales ($M_2 = M_1$), obtened la aceleración con la que se moverían los bloques

Solución:

Suponemos que cae M_2 por la pendiente, $\sum \vec{F} = m \vec{a}$

$$\begin{cases} Mg \operatorname{sen} \alpha_2 - T = Ma \\ T - Mg \operatorname{sen} \alpha_1 = Ma \end{cases} \Leftrightarrow Mg(\operatorname{sen} \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1) = 2Ma \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1)g$$

$$a = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1)g = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)g \text{ m/s}^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{2} - 1)g \text{ m/s}^2 = 0'1035 \text{ m/s}^2$$

La aceleración nos sale positiva, por lo que desciende la masa M_2

En el caso de que exista fricción entre el bloque M_1 y el plano inclinado (coeficiente estático μ_e y dinámico μ_d):

c) ¿Qué condición debe cumplir el valor de la masa M_2 para que la misma no descienda?

Solución:

Si no desciende la masa M_2 , $\sum \vec{F} = \vec{0}$

$$\begin{cases} M_2 g \operatorname{sen} \alpha_2 - T = 0 \\ T - M_1 g \operatorname{sen} \alpha_1 - F_R = 0 \end{cases} \text{ siendo } F_R \leq \mu_e N = \mu_e M_1 g \cos \alpha_1$$

$$M_2 g \operatorname{sen} \alpha_2 - M_1 g \operatorname{sen} \alpha_1 = F_R$$

Por lo tanto, $M_2 g \operatorname{sen} \alpha_2 - M_1 g \operatorname{sen} \alpha_1 \leq \mu_e M_1 g \cos \alpha_1 \Leftrightarrow M_2 \leq \frac{\mu_e \cos \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha_2} M_1$

$$M_2 \leq \frac{\mu_e \cos \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha_2} M_1 = \frac{\mu_e \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} M_1 \Leftrightarrow M_2 \leq \frac{\sqrt{3}\mu_e + 1}{\sqrt{2}} M_1 \Leftrightarrow$$

d) En el caso de que se tenga $M_2 = M_1$, ¿cuál será la aceleración del sistema?

Solución:

Suponemos que cae M_2 por la pendiente, $\sum \vec{F} = m \vec{a}$

$$\begin{cases} Mg \operatorname{sen} \alpha_2 - T = Ma \\ T - Mg \operatorname{sen} \alpha_1 - F_R = Ma \\ N = Mg \cos \alpha_1 \end{cases} \Leftrightarrow Mg(\operatorname{sen} \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1) - F_R = 2Ma \Leftrightarrow$$

$$Mg(\operatorname{sen} \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1) - \mu_d Mg \cos \alpha_1 = 2Ma \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1 - \mu_d \cos \alpha_1)g$$

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_d\right)g \text{ m/s}^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3}\mu_d)g \text{ m/s}^2$$

- e) En este mismo caso, ¿cuánta energía se pierde cuando los bloques se desplazan una distancia d a lo largo de los planos?

Solución:

La expresión de las energías, $W_{Fnc} = \Delta E_{mec}$

La única fuerza no conservativa que produce trabajo es la fuerza de rozamiento

$$\Delta E_{mec} = W_{F_R} = -F_R d = -\mu_d Mg \cos \alpha_1 d = -\frac{\sqrt{3}}{2} \mu_d Mgd$$

2. Se tienen tres conductores esféricos huecos y concéntricos, con radios interiores y exteriores, $a < b < c < d < e < f$ y cargas $-2Q$ el interior, Q el intermedio, $3Q$ el exterior.

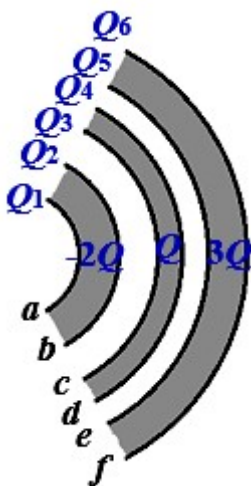
- a) Determina la carga que reside en cada una de las superficies.

Solución:

En el interior de un conductor la carga es cero.

Por lo tanto,

$$Q_1 = 0, Q_2 = -2Q, Q_3 = 2Q, Q_4 = -Q, Q_5 = Q \text{ y } Q_6 = 2Q$$



- b) Calcula el potencial en todo el espacio.

Solución:

CAMPO ELÉCTRICO

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\text{Como } \vec{E} // d\vec{S} \text{ radial, } \oint E dS = ES = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{Q_{enc}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\text{Si } r < a: Q_{enc} = 0 \Rightarrow \vec{E}_0 = \vec{0}$$

$$\text{Si } a < r < b: Q_{enc} = 0 \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{0}$$

$$\text{Si } b < r < c: Q_{enc} = -2Q \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{-2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\text{Si } c < r < d: Q_{enc} = 0 \Rightarrow \vec{E}_3 = \vec{0}$$

$$\text{Si } d < r < e: Q_{enc} = -Q \Rightarrow \vec{E}_4 = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\text{Si } e < r < f: Q_{enc} = 0 \Rightarrow \vec{E}_5 = \vec{0}$$

$$\text{Si } r > f: Q_{enc} = 2Q \Rightarrow \vec{E}_6 = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

POTENCIAL

$$V(a) - V(b) = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Tenemos en cuenta que la función potencial es continua y

$$\text{Si } r > f: V(r) - V(\infty) = -\int_{\infty}^r E_6 dr = -\int_{\infty}^r \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{\infty}^r = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow V(r) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\text{Si } e < r \leq f: V(e) = V(f) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 f} = V(r)$$

$$\text{Si } d < r < e: V(r) - V(e) = -\int_e^r \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_e^r = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{e} \right)$$

$$V(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{e} \right) + V(e) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{e} \right) + \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 f} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{e} + \frac{2}{f} \right)$$

$$V(d) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{2}{f} \right)$$

$$\text{Si } c < r < d: V(r) = V(c) = V(d) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{2}{f} \right)$$

$$\text{Si } b < r < c: V(r) - V(c) = -\int_c^r \frac{-2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_c^r = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{c} \right)$$

$$V(r) = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{c} \right) + V(c) = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{c} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{2}{f} \right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2}{r} + \frac{2}{c} - \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{2}{f} \right) \Rightarrow V(b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2}{b} + \frac{2}{c} - \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{2}{f} \right)$$

$$\text{Si } a < r < b: V(r) = V(a) = V(b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2}{b} + \frac{2}{c} - \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{2}{f} \right)$$

$$\text{Si } r < a: V(r) = V(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2}{b} + \frac{2}{c} - \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{2}{f} \right)$$

c) Calcula la energía electrostática del sistema de conductores.

Solución:

$$U = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} Q_i V_i$$

La energía electrostática del sistema de conductores,

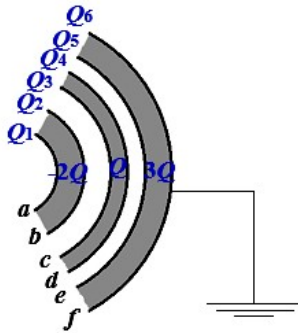
$$U = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-2Q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2}{b} + \frac{2}{c} - \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{2}{f} \right) + Q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{2}{f} \right) + 3Q \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 f} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-2 \left(-\frac{2}{b} + \frac{2}{c} - \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{2}{f} \right) + \left(-\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{2}{f} \right) + \frac{6}{f} \right) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4}{b} - \frac{4}{c} - \frac{1}{d} - \frac{1}{e} + \frac{4}{f} \right)$$

- d) Se conecta el conductor exterior a tierra. Determina la nueva distribución de cargas.

Solución:



En el interior de un conductor la carga es cero.

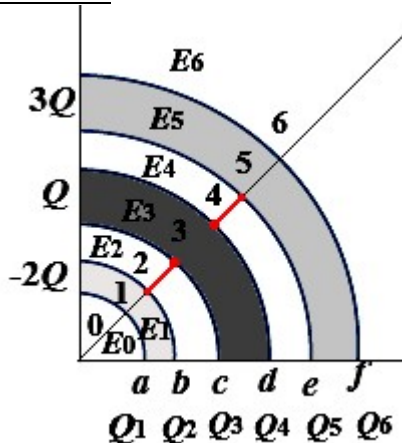
Al conectar el conductor exterior a tierra, la corteza del conductor esférico de radio f se descarga

Por lo tanto,

$$Q_1 = 0, Q_2 = -2Q, Q_3 = 2Q, Q_4 = -Q, Q_5 = Q \text{ y } Q_6 = 0$$

- e) Se vuelve a la situación inicial a) y se conectan los tres conductores entre ellos. Determina la nueva distribución de carga.

Solución:



Si $r < f$ al estar conectados los tres conductores el potencial debe ser constante por lo que el campo eléctrico es cero y por ello

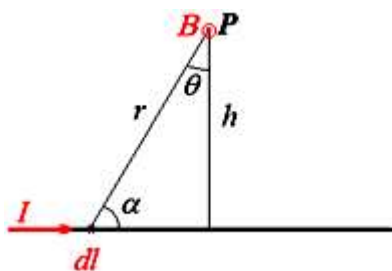
$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = 0 \text{ y } Q_6 = -2Q$$

Los tres conductores son un único conductor con una carga neta $-2Q$ la cual está en la superficie exterior de radio f

3. Un conductor rectilíneo con longitud L es recorrido por una corriente I .

- a) Calcula el campo $\vec{B}$ en un punto cualquiera de su mediatriz.

Solución:



$$h = r \sin \alpha$$

$$\tan \theta = \frac{x}{h} \Rightarrow x = h \tan \theta \Rightarrow dx = h \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = dl$$

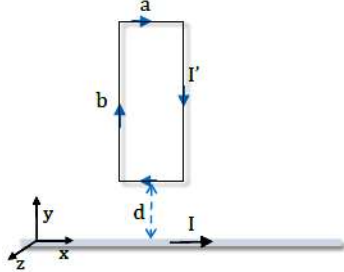
$$h = r \cos \theta$$

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{L} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I dl r \sin \alpha}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I dl h}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I h}{4\pi r^3} dl = \frac{\mu_0 I h^2}{4\pi r^3} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\mu_0 I r^2 \cos^2 \theta}{4\pi r^3} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \theta}{h} d\theta \end{aligned}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} \cos \theta d\theta \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} (\sin \theta) \Big|_{-\theta_0}^{\theta_0} = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} (\sin \theta_0 - \sin(-\theta_0))$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi h} 2 \sin \theta_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi h} 2 \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + h^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi h} \frac{L}{\sqrt{(L/2)^2 + h^2}}$$

Se coloca una espira rectangular en proximidad del conductor, recorrida por una corriente I' , tal como se muestra en la figura.



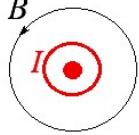
- b) Demuestra que el campo $\vec{B}$ en un punto cualquiera del espacio alrededor del cable, en el plano xy , considerando, $L \gg a, b, d$ (infinito), es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{k}$$

Solución:

Conductor rectilíneo uniforme e infinito

Tomamos trayectorias circulares de radio r



Ley de Ampère: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\phi$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{k}$$

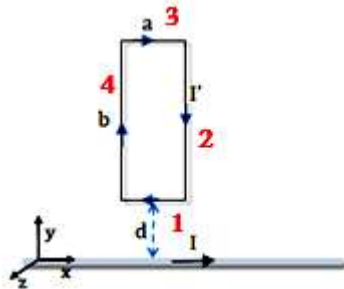
Por lo tanto, en el plano xy , y según la referencia del dibujo,

- c) Calcula la fuerza que experimenta cada lado de la espira.

Solución:

Ley de Lorentz, $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$ siendo I y l las magnitudes de la espira y B , el campo magnético creado el hilo sobre la espira

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{k}$$



Lado 1 de la espira: $\vec{F}_1 = I' a B_{\text{hilo}} \hat{j} = I' a \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{j} = \frac{\mu_0 I I' a}{2\pi d} \hat{j}$

Lado 3 de la espira: $\vec{F}_3 = I' a B_{\text{hilo}} (-\hat{j}) = -I' a \frac{\mu_0 I}{2\pi (b+d)} \hat{j} = -\frac{\mu_0 I I' a}{2\pi (b+d)} \hat{j}$

Lado 2 de la espira: $\vec{F}_2 = \int_d^{b+d} I' B_{\text{hilo}} dl (-\hat{i}) = \int_d^{b+d} I' \frac{\mu_0 I}{2\pi y} dy (-\hat{i}) = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi} \int_d^{b+d} \frac{dy}{y} (-\hat{i})$

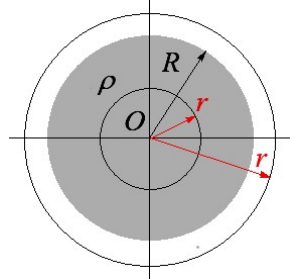
$$= -\frac{\mu_0 I I'}{2\pi} \ln \left(\frac{b+d}{d} \right) \hat{i}$$

Lado 4 de la espira: $\vec{F}_4 = -\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi} \ln \left(\frac{b+d}{d} \right) \hat{i}$

4. Se tiene un cilindro con radio R y longitud $L \gg R$, que tiene una densidad de carga de volumen homogénea ρ .

a) Calcula el campo eléctrico generado por el cilindro en todo el espacio

Solución:



$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0}$$

Ley de Gauss,

Tomamos como superficie gaussiana un cilindro de radio r y longitud L

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{sup. lateral}} E dS = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E 2\pi r L = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

$$\rho = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q_{\text{enc}} = \rho V$$

Si $r < R$:

$$E 2\pi r L = \frac{\rho \pi r^2 L}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \hat{r}$$

Si $r > R$:

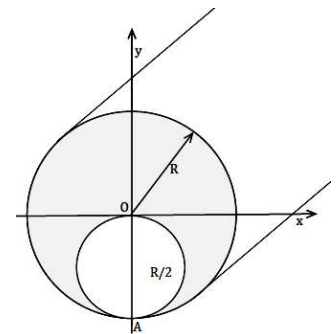
$$E 2\pi r L = \frac{\rho \pi R^2 L}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r}$$

b) Calcula la diferencia de potencial entre el centro O del cilindro y un punto de la superficie del cilindro.

Solución:

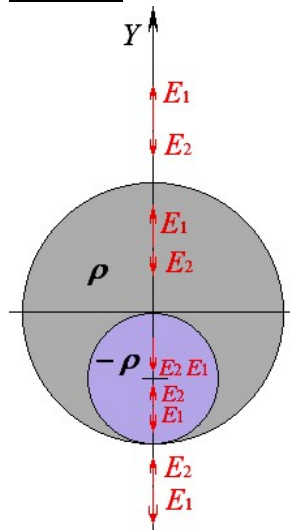
$$V(0) - V(R) = - \int_R^0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_R^0 E dr = - \int_R^0 \frac{\rho r}{2\epsilon_0} dr = - \frac{\rho}{4\epsilon_0} (r^2) \Big|_R^0 = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}$$

Se practica un agujero cilíndrico, con radio $R/2$, en el interior del cilindro tal como se representa en la figura.



c) Calcula el campo eléctrico en todos los puntos a lo largo del eje y

Solución:



$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Si $y > R$:

$$\vec{E}_T = \left(\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{y} - \frac{\rho \left(\frac{R}{2}\right)^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{y + \frac{R}{2}} \right) \hat{j} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{4y + 2R} \right) \hat{j}$$

Si $0 < y < R$:

$$\vec{E}_T = \left(\frac{\rho y}{2\epsilon_0} - \frac{\rho \left(\frac{R}{2}\right)^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{y + \frac{R}{2}} \right) \hat{j} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(y - \frac{R^2}{4y + 2R} \right) \hat{j}$$

Si $-\frac{R}{2} < y < 0$:

$$\vec{E}_T = \left(-\frac{\rho |y|}{2\epsilon_0} - \frac{\rho \left(\frac{R}{2}\right)^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{\left(\frac{R}{2} - |y|\right)} \right) \hat{j} = -\frac{\rho R}{4\epsilon_0} \hat{j}$$

Si $-R < y < -\frac{R}{2}$:

$$\vec{E}_T = \left(-\frac{\rho |y|}{2\epsilon_0} + \frac{\rho \left(\frac{R}{2}\right)^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{\left(|y| - \frac{R}{2}\right)} \right) \hat{j} = -\frac{\rho R}{4\epsilon_0} \hat{j}$$

$$\vec{E}_r = \left(-\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{|y|} + \frac{\rho \left(\frac{R}{2}\right)^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{|y| - \frac{R}{2}} \right) \hat{j} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \left(-\frac{1}{|y|} + \frac{1}{4\left(|y| - \frac{R}{2}\right)} \right) \hat{j}$$

Si $y < -R$:

d) Calcula la diferencia de potencial entre el centro O y el punto A .

Solución:

Las líneas de campo siempre van de potenciales mayores a potenciales menores

$$V(0) - V(A) < 0$$

$$V(0) - V(A) = -\int_R^0 \vec{E} \cdot d\hat{r} = -\int_R^0 E dr = -\int_R^0 -\frac{\rho R}{4\epsilon_0} dr = \frac{\rho R}{4\epsilon_0} (r) \Big|_R^0 = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}$$

ÁLGEBRA. EXAMEN 15 FEBRERO 2025
ING. TELECOMUNICACIONES

1 (2puntos). Considere los siguientes subespacios de $\mathbb{R}_3[x]$.

$$S = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = p(1), p'(0) = p'(1)\}$$

$$T = \mathbb{R} \langle \{-2 + x - 3x^2 + 2x^3, -1 + 2x^2 - x^3, -4 + x + x^2\} \rangle$$

Halla bases de S , T , $S \cap T$ y $S + T$

Solución:

Estudiamos las restricciones del subespacio S :

Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ y $p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$

$$p(0) = a_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = p(1) \Leftrightarrow 0 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$p'(0) = a_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 = p'(1) \Leftrightarrow 0 = 2a_2 + 3a_3$$

Por lo tanto, $S = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid 0 = a_1 + a_2 + a_3, 0 = 2a_2 + 3a_3\}$

$$\begin{cases} 0 = a_1 + a_2 + a_3 \\ 0 = 2a_2 + 3a_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = -a_1 - a_2 \\ a_2 = -3a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = 2a_1 \\ a_2 = -3a_1 \end{cases}$$

$$S = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_3 = 2a_1, a_2 = -3a_1\}$$

$$= \{p(x) = a_0 + a_1x - 3a_1x^2 + 2a_1x^3 = a_0 + a_1(x - 3x^2 + 2x^3) \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$S = \mathbb{R} \langle \{1, x - 3x^2 + 2x^3\} \rangle \Rightarrow \text{Sist. Generador } S = \{1, x - 3x^2 + 2x^3\}$$

Los polinomios son linealmente independientes, por lo que $B_S = \{1, x - 3x^2 + 2x^3\}$; $\dim S = 2$

$$T = \mathbb{R} \langle \{-2 + x - 3x^2 + 2x^3, -1 + 2x^2 - x^3, -4 + x + x^2\} \rangle \Rightarrow$$

$$\text{Sist. Generador } T = \{-2 + x - 3x^2 + 2x^3, -1 + 2x^2 - x^3, -4 + x + x^2\}$$

Estudiamos la dependencia lineal de $\{-2 + x - 3x^2 + 2x^3, -1 + 2x^2 - x^3, -4 + x + x^2\}$

Método Gauss:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{P_{21}(-2) \\ P_{31}(-4)}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{32}(-1)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que, los polinomios $\{-1 + 2x^2 - x^3, x - 7x^2 + 4x^3\}$ linealmente independientes

$$B_T = \{-1 + 2x^2 - x^3, x - 7x^2 + 4x^3\}; \dim T = 2$$

$$S \cap T = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(x) \in S \wedge p(x) \in T\}$$

Estudiamos las restricciones del subespacio $S \cap T$:

$$p(x) \in S \Leftrightarrow p(x) = \alpha_1 + \alpha_2(x - 3x^2 + 2x^3)$$

$$p(x) \in T \Leftrightarrow p(x) = \beta_1(-1 + 2x^2 - x^3) + \beta_2(x - 7x^2 + 4x^3)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2(x - 3x^2 + 2x^3) = \beta_1(-1 + 2x^2 - x^3) + \beta_2(x - 7x^2 + 4x^3) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\beta_1 \\ \alpha_2 = \beta_2 \\ -3\alpha_2 = 2\beta_1 - 7\beta_2 \\ 2\alpha_2 = -\beta_1 + 4\beta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\beta_1 \\ \alpha_2 = \beta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 2\beta_2 \\ \alpha_1 = -2\beta_2 \\ \alpha_2 = \beta_2 \end{cases}$$

$$p(x) = \alpha_1 + \alpha_2(x - 3x^2 + 2x^3) = -2\beta_2 + \beta_2(x - 3x^2 + 2x^3) = \beta_2(-2 + x - 3x^2 + 2x^3)$$

$$B_{S \cap T} = \{-2 + x - 3x^2 + 2x^3\}; \dim S \cap T = 1$$

$$\dim S + T = \dim S + \dim T - \dim S \cap T = 2 + 2 - 1 = 3$$

$$\text{Sis. Generador } S + T = \{1, x - 3x^2 + 2x^3, -1 + 2x^2 - x^3, x - 7x^2 + 4x^3\}$$

Estudiamos la linealidad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{31}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{43}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Polinomios lienalmente independientes, $\{1, x - 3x^2 + 2x^3, 2x^2 - x^3\}$

$$B_{S+T} = \{1, x - 3x^2 + 2x^3, 2x^2 - x^3\}$$

2 (3 puntos). Dada la aplicación lineal

$$f: \mathfrak{R}_3[x] \rightarrow \mathfrak{R}_3[x]$$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mapsto a_0 + (a_1 + a_2)(x + x^2) + (a_0 + 2a_3)x^3$$

a) Determina su matriz coordenada respecto de la base $\{1, x, x^2, x^3\}$

Solución:

$$\begin{cases} f(1) = 1 + x^3 \\ f(x) = x + x^2 \\ f(x^2) = x + x^2 \\ f(x^3) = 2x^3 \end{cases}; Y = AX \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Hallar bases de $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$. Clasifica f

Solución:

$$\text{Ker } f = \{p(x) \in \mathfrak{R}_3[x] \mid f(p(x)) = 0_{\mathfrak{R}_3[x]}\}$$

$$\text{Ker } f = \{p(x) \in \mathfrak{R}_3[x] \mid a_0 + (a_1 + a_2)(x + x^2) + (a_0 + 2a_3)x^3 = 0_{\mathfrak{R}_3[x]}\}$$

Estudiamos las restricciones del subespacio $\text{Ker } f$:

$$a_0 + (a_1 + a_2)(x + x^2) + (a_0 + 2a_3)x^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 + 2a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = a_3 = 0 \\ a_2 = -a_1 \end{cases}$$

$$\text{Ker } f = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0 = a_3 = 0, a_2 = -a_1\} = \{a_1x - a_1x^2 = a_1(x - x^2)\}$$

$$\text{Ker } f = \langle \{x - x^2\} \rangle \Rightarrow B_{\text{Ker } f} = \{x - x^2\}, \dim \text{Ker } f = 1$$

$$\dim \text{Im } f = \text{rang } A = 3$$

$$\text{Im } f = \langle \{1 + x^3, x + x^2, 2x^3\} \rangle \Rightarrow B_{\text{Im } f} = \{1 + x^3, x + x^2, 2x^3\}$$

La aplicación lineal f es inyectiva, monomorfismo $\Leftrightarrow \dim \text{Ker } f = 0$.

Por lo tanto, f no es inyectiva

La aplicación lineal f es suprayectiva, epimorfismo $\Leftrightarrow \text{Im } f = \mathfrak{R}_3[x]$

$$\dim \text{Im } f = \dim \mathfrak{R}_3[x] = 3 \Rightarrow f \text{ es suprayectiva}$$

La aplicación lineal f no es biyectiva, isomorfismo ya que no es inyectiva

c) Calcula una base de $\mathfrak{R}_3[x]$. respecto de la cual la matriz coordenada de f sea diagonal

Solución:

Estudiamos si el endomorfismo es diagonalizable

La aplicación f es diagonalizable si y solo si A es diagonalizable

La matriz A es diagonalizable $\Leftrightarrow$

- los valores propios $\lambda_i \in \mathbb{R}, i=\{1,2,3,4\}$
- la multiplicidad algebraica coincide con $\dim S(\lambda)_i, i=\{1,2,3,4\}$

Valores propios: $|A - \lambda I_4| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)\lambda(\lambda-2) = 0 \Rightarrow 0 = \lambda(1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 & m(0) = 1 \\ \lambda = 1 & m(1) = 1 \\ \lambda = 2 & m(2) = 2 \end{cases}$$

Valores propios,

Por lo tanto, la matriz será diagonalizable $\Leftrightarrow \dim S(2) = 2 = m(2)$

$$\dim S(2) = \dim \mathfrak{R}_3[x] - \text{rang}(A - 2I_4) = 4 - 2 = 2$$

$$\text{rang}(A - 2I_4) = \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$\dim S(2) = 2 = m(2) \Rightarrow$ La matriz A es diagonalizable

Vectores propios asociados a los valores propios, $(A - \lambda I_4) X = 0$

$$\text{Si } \lambda = 0: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \\ a + 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = d = 0 \\ c = -b \end{cases} \Rightarrow \forall b$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Por lo tanto, } S(0) = \mathfrak{R} \langle x - x^2 \rangle$$

$$\text{Si } \lambda = 1: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = c = 0 \\ d = -a \end{cases} \Rightarrow \forall a$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Por lo tanto, } S(1) = \mathfrak{R} \langle 1 - x^3 \rangle$$

$$\text{Si } \lambda = 2: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = b \end{cases} \Rightarrow \forall b, d$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \\ d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Por lo tanto, } S(2) = \mathfrak{R} \langle \{x + x^2, x^3\} \rangle$$

Por lo tanto, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matriz asociada a la aplicación f respecto de la base de vectores propios, $B_{\mathfrak{B}_3} = \{x - x^2, 1 - x^3, x + x^2, x^3\}$

d) Si llamamos D a la matriz diagonal calculada en el apartado anterior, y A a la matriz coordenada respecto de la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ halla razonadamente una matriz P tal que $P^{-1}DP = A$

Solución:

Sea A matriz asociada a la aplicación lineal, $Y = AX$, respecto de la base

$$B_{\mathfrak{B}_3} = \{1, x, x^2, x^3\} = \{e_i\}_{i=1}^4$$

Sea D matriz asociada a la aplicación lineal, $\tilde{Y} = D\tilde{X}$, respecto de la base

$$\tilde{B}_{\mathfrak{B}_3} = \{x - x^2, 1 - x^3, x + x^2, x^3\} = \{v_i\}_{i=1}^4$$

$$Q' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = X^t \left(\{e_i\}_{i=1}^4 \right) = \tilde{X}^t \left(\{v_i\}_{i=1}^4 \right) = \tilde{X}^t Q' \left(\{e_i\}_{i=1}^4 \right), \text{ siendo}$$

$$X^t = \tilde{X}^t P^t \Leftrightarrow X = Q\tilde{X} \Leftrightarrow \tilde{X} = Q^{-1}X$$

$$\text{Análogamente obtenemos, } \tilde{Y} = P^{-1}Y$$

$$\tilde{Y} = D\tilde{X} \Rightarrow Q^{-1}Y = DQ^{-1}X \Rightarrow Y = QDQ^{-1}X = P^{-1}DPX \Leftrightarrow P = Q^{-1}$$

Calculamos Q^{-1}

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{P_{12}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{P_{31}(1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{P_{42}(1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{P_2\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{P_{13}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego,

3 (3 puntos). En $\mathfrak{R}_3[x]$ se considera el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ cuya matriz coordenada respecto

$$\text{de la base } \{1, x, x^2, x^3\} \text{ es } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $\langle 1+2x, x+3x^3 \rangle$

Solución:

$$\langle 1+2x, x+3x^3 \rangle = (1 \ 2 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = (4 \ 5 \ 3 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 5$$

b) Halla una base ortogonal del espacio euclídeo $(\mathfrak{R}_3[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$

Solución:

Método de ortogonalización por Gram-Smidt

Sea $\{u_1, u_2, u_3, u_4\} = \{1, x, x^2, x^3\}$ una base de $\mathfrak{R}_3[x]$. A partir de esta base, construimos una

base ortogonal $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de la siguiente manera

$$v_1 = u_1 = 1$$

$v_2 = \alpha v_1 + u_2$, imponemo que sea ortogonal a v_1

$$0 = \langle v_2, v_1 \rangle = \alpha \langle v_1, v_1 \rangle + \langle u_2, v_1 \rangle \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = -\frac{1}{2}$$

$$\langle u_2, v_1 \rangle = \langle x, 1 \rangle = (0 \ 1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\langle v_1, v_1 \rangle = \langle 1, 1 \rangle = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (2 \ 1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$v_2 = \alpha v_1 + u_2 = -\frac{1}{2} + x$$

$v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2 + u_3$, imponemos que sea ortogonal a v_1 y a v_2

$$0 = \langle v_3, v_1 \rangle = \alpha \langle v_1, v_1 \rangle + \beta \langle v_2, v_1 \rangle + \langle u_3, v_1 \rangle \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = -\frac{1}{2}$$

$$\langle u_3, v_1 \rangle = \langle x^2, 1 \rangle = (0 \ 0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \ 1 \ 2 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$0 = \langle v_3, v_2 \rangle = \alpha \langle v_1, v_2 \rangle + \beta \langle v_2, v_2 \rangle + \langle u_3, v_2 \rangle \Leftrightarrow \beta = -\frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} = -\frac{1}{3}$$

$$\langle u_3, v_2 \rangle = \left\langle x^2, -\frac{1}{2} + x \right\rangle = (0 \ 0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \ 1 \ 2 \ 0) \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle = \left\langle -\frac{1}{2} + x, -\frac{1}{2} + x \right\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}$$

$$v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2 + u_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} + x \right) + x^2 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x + x^2$$

$$v_4 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + u_4, \text{ imponemos que sea ortogonal a } v_1, v_2 \text{ y } v_3$$

$$\langle v_4, v_1 \rangle = \alpha \langle v_1, v_1 \rangle + \beta \langle v_2, v_1 \rangle + \gamma \langle v_3, v_1 \rangle + \langle u_4, v_1 \rangle \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\langle u_4, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = 0$$

$$\langle u_4, v_1 \rangle = \langle x^3, 1 \rangle = (0 \ 0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle v_4, v_2 \rangle = \alpha \langle v_1, v_2 \rangle + \beta \langle v_2, v_2 \rangle + \gamma \langle v_3, v_2 \rangle + \langle u_4, v_2 \rangle \Leftrightarrow \beta = -\frac{\langle u_4, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} = 0$$

$$\langle u_4, v_2 \rangle = \left\langle x^3, -\frac{1}{2} + x \right\rangle = (0 \ 0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0 \ 2) \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle v_4, v_3 \rangle = \alpha \langle v_1, v_3 \rangle + \beta \langle v_2, v_3 \rangle + \gamma \langle v_3, v_3 \rangle + \langle u_4, v_3 \rangle \Leftrightarrow \gamma = -\frac{\langle u_4, v_3 \rangle}{\langle v_3, v_3 \rangle} = 0$$

$$\langle u_4, v_3 \rangle = \left\langle x^3, -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x + x^2 \right\rangle = (0 \ 0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0 \ 2) \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$v_4 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + u_4 = x^3$$

$$\text{Base ortogonal } \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \left\{ 1, -\frac{1}{2} + x, -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x + x^2, x^3 \right\}$$

c) A partir del resultado del apartado anterior determina una matriz $Q \in M_4(\mathbb{R})$ regular tal que QAQ^t sea diagonal

Solución:

$$\langle v_1, v_1 \rangle = 2; \quad \langle v_2, v_2 \rangle = \frac{3}{2}; \quad \langle v_3, v_3 \rangle = 2; \quad \langle v_4, v_4 \rangle = \langle x^3, x^3 \rangle = 2$$

$$\begin{aligned} \langle v_3, v_3 \rangle &= \left\langle -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x + x^2, -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x + x^2 \right\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\langle v_4, v_4 \rangle = \langle x^3, x^3 \rangle = (0 \ 0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0 \ 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$D = Q A Q^t; \text{ siendo } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ respecto de la base } \left\{ 1, -\frac{1}{2} + x, -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x + x^2, x^3 \right\}$$

$$p(x) = X^t \left(\{e_i\}_{i=1}^4 \right) = \tilde{X}^t \left(\{v_i\}_{i=1}^4 \right) = \tilde{X}^t P^t \left(\{e_i\}_{i=1}^4 \right); \text{ siendo } P = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $X^t = \tilde{X}^t P^t \Leftrightarrow X = P \tilde{X}$. Análogamente, $Y = P \tilde{Y}$

$$f(p(x), q(x)) = X^t A Y = \tilde{X}^t D \tilde{Y}$$

$$X^t A Y = \tilde{X}^t P^t A P \tilde{Y} = \tilde{X}^t D \tilde{Y} \Leftrightarrow D = P^t A P = Q A Q^t$$

Por lo tanto, $Q = P^t$

d) Calcula $S^\perp$ si S es el subespacio definido en el ejercicio 1

Solución:

$$\text{Sea } B_S = \{1, x - 3x^2 + 2x^3\}$$

$$\text{Sea } S^\perp = \{p(x) \in \mathfrak{R}_3[x] \mid \langle p(x), v \rangle = 0 \quad \forall v \in S\}$$

$$\text{Si } p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \langle a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, 1 \rangle =$$

$$\begin{pmatrix} 2a_0 + a_1 + a_2 & a_0 + 2a_1 + a_2 & a_0 + a_1 + 2a_2 & 2a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2a_0 + a_1 + a_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \langle a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, x - 3x^2 + 2x^3 \rangle =$$

$$\begin{pmatrix} 2a_0 + a_1 + a_2 & a_0 + 2a_1 + a_2 & a_0 + a_1 + 2a_2 & 2a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -2a_0 - a_1 - 5a_2 + 4a_3 = 0$$

$$\begin{cases} 2a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ -2a_0 - a_1 - 5a_2 + 4a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_2 + a_3 = 0 \Leftrightarrow a_3 = a_2 \\ a_1 = -2a_0 - a_2 \end{cases} \quad \forall a_0, a_2$$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_0 + (-2a_0 - a_2)x + a_2x^2 + a_2x^3 = a_0(1 - 2x) + a_2(-x + x^2 + x^3)$$

$$B_{S^\perp} = \{1 - 2x, -x + x^2 + x^3\}$$

4 (1 punto). Resuelve, si es posible, la ecuación diofántica $132x + 351y = 1020$ justificando los cálculos realizados. ¿Existe alguna solución para la que los valores x e y son ambos positivos?

Solución:

Utilizando el algoritmo de Euclides, calculamos el $mcd(132, 351)$

$$351 = 2 \cdot 132 + 87$$

$$132 = 1 \cdot 87 + 45$$

$$87 = 1 \cdot 45 + 42$$

$$45 = 1 \cdot 42 + 3$$

$$42 = 14 \cdot 3 + 0$$

Por lo tanto, $mcd(132, 351) = 3$

Identidad de Bezout, Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ y $mcd(a, b) = d$, entonces $am + bn = d$ con $m, n \in \mathbb{Z}$

Buscamos la identidad de Bezout: $132x + 351y = 3$

$$45 = 1 \cdot 42 + 3 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 3 &= 45 - 1 \cdot 42 = 45 - 1 \cdot (87 - 1 \cdot 45) = 2 \cdot 45 - 1 \cdot 87 = 2 \cdot (132 - 1 \cdot 87) - 1 \cdot 87 = 2 \cdot 132 - 3 \cdot 87 \\ &= 2 \cdot 132 - 3 \cdot (351 - 2 \cdot 132) = 8 \cdot 132 - 3 \cdot 351 = 3 \end{aligned}$$

$$\frac{1020}{3} = 340$$

. Por lo tanto, si multiplicamos por 340

$$8 \cdot 132 - 3 \cdot 351 = 3 \Rightarrow 2720 \cdot 132 - 1020 \cdot 351 = 1020 \Rightarrow$$

Por lo tanto, $132x + 351y = 1020$, donde $x_0 = 2.720$ e $y_0 = -1.020$

Utilizando la propiedad: si (x_0, y_0) es solución de $ax + by = c$, también lo son

$$x = x_0 + \frac{b}{d}n \quad y = y_0 - \frac{a}{d}n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Solución general, } \begin{cases} x = 2.720 + \frac{351}{3}p = 2.720 + 117p \\ y = -1.020 - \frac{132}{3}p = -1.020 - 44p \end{cases} \quad \forall p \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Para que ambos sean positivos, } \begin{cases} 2.720 + 117p \geq 0 \\ -1.020 - 44p \geq 0 \end{cases} \quad \forall p \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$-1.020 - 44p \geq 0 \Leftrightarrow p \leq \frac{-1.020}{44} \Rightarrow p \leq -24, \text{ número entero}$$

$$\text{Si } p = -24 \Rightarrow 2.720 + 117 \cdot (-24) = -88 < 0$$

Luego no existe ninguna solución para que ambos sean positivos

5 (1 punto). Una empresa fabrica microprocesadores para ser incorporados en los ordenadores que controlan un satélite de comunicaciones. Si el doble de los microprocesadores fabricados se empaquetara en cajas de 11 sobrarían 5; sin embargo, si el cuádruple de los fabricados se empaquetara en cajas de 12 sobrarían 8 y si seis veces los fabricados se empaquetasen de 13 en 13 sobrarían 7. Sabiendo que la capacidad de fabricación no puede superar los 855000 microprocesadores, ¿cuál es el número máximo de microprocesadores producidos?

Solución:

Sea $x \equiv$ número de microprocesadores

$$\begin{cases} 2x = 5 \pmod{11} \\ 4x = 8 \pmod{12} \\ 6x = 7 \pmod{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 5 \pmod{11} \\ x = 2 \pmod{12} \\ 6x = 7 \pmod{13} \end{cases}$$

Inverso de 2 a Z_{11} ; $11 = 5 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 1 = 11 - 5 \cdot 2$; entonces el inverso es $-5 = 6 \pmod{11}$

Luego $2x = 5 \pmod{11} \xrightarrow{\times 6} x = 8 \pmod{11}$

Inverso de 6 a Z_{13} ; $13 = 6 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 1 = 13 - 2 \cdot 6$; entonces el inverso es $-2 = 11 \pmod{13}$

Luego $6x = 7 \pmod{13} \xrightarrow{\times 11} x = 12 \pmod{13}$

Por lo tanto, resolvemos

$$\begin{cases} x = 2 \pmod{3} \\ x = 8 \pmod{11} \\ x = 12 \pmod{13} \end{cases} \Leftrightarrow$$

tiene solución ya que $\{3, 11, 13\}$ son primos entre sí

$$x = 2 + 3p_1 = 8 + 11p_2 \Leftrightarrow 3p_1 = 6 + 11p_2. \text{ Como inverso de 3 en } Z_{11} \text{ es 4, } p_1 = 2 + 11p_2$$

Sustituyendo

$$x = 2 + 3p_1 = 2 + 3(2 + 11p_2) = 8 + 33p_2 = 12 + 13p_3 \Leftrightarrow 7p_2 = 4 + 13p_3.$$

Inverso de 7 en Z_{13} es 2, $p_2 = 8 + 13p_3$

Sustituyendo $x = 8 + 33p_2$

$$x = 8 + 33p_2 = 8 + 33(8 + 13p_3) = 8 \cdot 34 + 13 \cdot 33p_3 = 272 + 429p_3 \text{ con } p_3 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Debe cumplirse } 272 + 429p_3 \leq 855000 \Rightarrow p_3 \leq \frac{855000 - 272}{429} \leq 1992$$

Luego la solución es $272 + 429 \cdot 1.992p_3 \leq 854.84$ microprocesadores

CÁLCULO. ING. TELECOMUNICACIONES
EXAME 8 ENERO 2025

1. (2 puntos)

a) Halla las raíces complejas de $z^4 + 4 = 0$

Solución:

$$z^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -4 \Leftrightarrow w = -4 = 4e^{i\pi}$$

Las raíces son $z = \rho^{1/n} e^{i(\varphi+2k\pi)/n}$ con $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Por lo tanto, $z = 4^{1/4} e^{i(\pi+2k\pi)/4}$, con $k = \{0, 1, 2, 3\}$

$$z_0 = 4^{1/4} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = 1 + i$$

$$z_1 = 4^{1/4} e^{i\frac{3\pi}{4} + i\pi} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right) = -1 + i$$

$$z_2 = 4^{1/4} e^{i\frac{5\pi}{4} + i\pi} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} \right) = -1 - i$$

$$z_3 = 4^{1/4} e^{i\frac{7\pi}{4} + i\pi} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} \right) = 1 - i$$

b) Usa el resultado del apartado anterior para factorizar $z^4 + 4$ como producto de dos polinomios de segundo grado con coeficientes reales.

Solución:

$$z^4 + 4 = (z - (1+i))(z - (1-i))(z - (-1+i))(z - (-1-i)) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)$$

c) Calcula $\int \frac{8}{x^4 + 4} dx$

Solución:

Descomponemos en fracciones simples $\frac{8}{x^4 + 4}$

$$\frac{8}{x^4 + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 - 2x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2} = \frac{-x + 2}{x^2 - 2x + 2} + \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2}$$

$$\int \frac{8}{x^4 + 4} dx = \int \frac{-x + 2}{x^2 - 2x + 2} dx + \int \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx$$

$$\int \frac{-x + 2}{x^2 - 2x + 2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{2x - 4}{x^2 - 2x + 2} dx = -\frac{1}{2} \left(\int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} dx - 2 \int \frac{dx}{1 + (x-1)^2} dx \right) =$$

$$-\frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x + 2| + \operatorname{arctg}(x-1) + C$$

$$\int \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 4}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \left(\int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx + 2 \int \frac{dx}{1 + (x+1)^2} dx \right) =$$

$$\frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 2| + \operatorname{arctg}(x+1) + C$$

$$\int \frac{8}{x^4 + 4} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2} \right| + \arctg(x-1) + \arctg(x+1) + C$$

2. (1 punto)

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sin(x)}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sin(x)} = 1^\infty \text{ Ind} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} 0} = e^0 = 1$$

1: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$, ya que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{x} = 0$ siendo $-1 \leq k \leq 1$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x}-2}{x+1} = \frac{0}{0} \text{ Ind}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x}-2}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{5+x}+2}{\sqrt{5+x}+2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5+x-4}{(x+1)(\sqrt{5+x}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{5+x}+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{5+x}+2} = \frac{1}{4}$$

3. (0'5 puntos). Halla un intervalo $[a, b]$ tal que $|b-a|=1$ y que contenga una solución de la ecuación $x^5 - 4x^3 - 3x = -1$

Solución:

$$x^5 - 4x^3 - 3x = -1 \Leftrightarrow x^5 - 4x^3 - 3x + 1 = 0$$

Teorema de Bolzano:

Sea $f(x) = x^5 - 4x^3 - 3x + 1$ continua en $\mathbb{R}$; $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = -5 < 0$. Entonces,

$\exists x \in (0, 1) \mid f(x) = 0$. Por lo tanto, podemos tomar $a = 0$ y $b = 1$

4. (1'5 puntos). Sea $f(x) = \arctg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

a) Determina su dominio

Solución:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

b) Halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

Solución:

$$f(x) = \arctg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

$f(x)$ creciente en $x \in (-\infty, 1)$ y en $x \in (1, +\infty)$

c) Utiliza el resultado anterior para demostrar que

$$-\frac{\pi}{4} < f(x) < \frac{\pi}{2} \text{ si } x \in (-\infty, 1) \text{ y } -\frac{\pi}{2} < f(x) < -\frac{\pi}{4} \text{ si } x \in (1, +\infty)$$

Solución:

Consideramos el intervalo $x \in (-\infty, 1)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg\left(\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg(-1) = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, si $x \in (-\infty, 1)$: $-\frac{\pi}{4} < f(x) < \frac{\pi}{2}$

Consideramos el intervalo $x \in (1, +\infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \arctg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg\left(\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg(-1) = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto, si $x \in (1, +\infty)$: $-\frac{\pi}{2} < f(x) < -\frac{\pi}{4}$

5. (1'25 puntos). Calcula el siguiente límite sin utilizar la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \operatorname{tg}(x) - x - x^2}{x(1 - \cos(x))}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \operatorname{tg}(x) - x - x^2}{x(1 - \cos(x))} = \frac{0}{0} \text{ Ind}$$

Sea $f(x) = e^x \operatorname{tg}(x) - x - x^2$, calculamos $P_{3,0}f(x)$

$$f(x) = e^x \operatorname{tg}(x) - x - x^2 \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = e^x \operatorname{tg}(x) + e^x (1 + \operatorname{tg}^2(x)) - 1 - 2x \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = e^x (1 + \operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}^2(x)) + e^x (1 + \operatorname{tg}^2(x) + 2\operatorname{tg}(x)(1 + \operatorname{tg}^2(x))) - 2$$

$$f''(x) = e^x (2 + 3\operatorname{tg}(x) + 2\operatorname{tg}^2(x) + 2\operatorname{tg}^3(x)) - 2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = e^x (2 + 3(1 + \operatorname{tg}^2(x)) + 4\operatorname{tg}(x)(1 + \operatorname{tg}^2(x)) + 6\operatorname{tg}^2(x)(1 + \operatorname{tg}^2(x))) \Rightarrow f'''(0) = 5$$

$$P_{3,0}f(x) = \frac{5}{3!}x^3 = \frac{5}{6}x^3$$

Sea $1 - \cos(x) \cong \frac{x^2}{2}$ si $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \operatorname{tg}(x) - x - x^2}{x(1 - \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{6}x^3}{\frac{1}{2}x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

6. (0'75 puntos). Halla los máximos y mínimos relativos de la función

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt \quad x \in (1, +\infty)$$

Solución:

Teorema fundamental del cálculo integral:

Sean $g(x) = 1$ y $h(x) = x^2$ funciones derivables, $f(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}$ continua en $t \in (1, +\infty)$.

Si definimos $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt$ se tiene una función derivada y su derivada es

$$F'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x) = f(x^2)2x = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} 2x = \frac{2\operatorname{sen}(x^2)}{x} \quad x \in (1, +\infty)$$

Puntos críticos: $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x_k = \sqrt{k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$

$$F'(x) = \frac{2\operatorname{sen}(x^2)}{x} \quad x \in (1, +\infty)$$

$$F''(x) = \frac{1}{x^2} (4x^2 \cos(x^2) - 2\operatorname{sen}(x^2)) = 4\cos(x^2) - \frac{2}{x^2} \operatorname{sen}(x^2)$$

Sustituimos en los puntos críticos:

$$F''(x_k) = 4\cos(k\pi)$$

Si $k = 2n$, entonces $F''(x_k) > 0$ y si $k = 2n-1$, entonces $F''(x_k) < 0$

$F(x)$ tiene en $x_{2n} = \sqrt{2n\pi}$ mínimos relativos y en $x_{2n-1} = \sqrt{(2n-1)\pi}$ máximos relativos con $n \in \mathbb{Z}$

7. (1'25 puntos).

a) Calcula, si existe, la integral impropia $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2(x)} dx$

Solución:

$$\int \frac{1}{x \ln^2(x)} dx = -\frac{1}{\ln(x)} + C$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2(x)} dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_2^h \frac{1}{x \ln^2(x)} dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln(x)} \right) \Big|_2^h = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln(h)} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}$$

b) Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2(n)}$

Solución:

$$f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x \ln^2(x)}$$

$f(x)$ función decreciente ya que $f'(x) = -\frac{1}{x^2 \ln^2(x)} - \frac{2}{x^2 \ln^3(x)} < 0$

Aplicando el criterio de la integral

Como $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2(x)} dx$ es convergente, también lo es la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2(n)}$

8. (1'75 puntos).

a) Halla el desarrollo de Mac-Laurin de las funciones

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \text{ y } g(x) = \ln(1+x^2)$$

Indicando su intervalo de convergencia

Solución:

Serie geométrica, $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ si $|x| < 1$

Entonces, $\frac{2x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2x \cdot x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2x^{2n+1}$ si $|x| < 1$

$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2x^{2n+1}$, intervalo de convergencia $I = (-1, 1)$

$$g(x) = \ln(1+x^2) = \int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2t^{2n+1} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2t^{2n+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2 \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$$

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1}$, intervalo de convergencia $I = (-1, 1)$

b) Estudia la convergencia de las series anteriores en los extremos del intervalo.

Solución:

$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2x^{2n+1}$, intervalo de convergencia $I = (-1, 1)$

En $x = 1$: $f(1) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ serie oscilante

En $x = -1$: $f(-1) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{3n+1} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}$ serie oscilante

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1}$, intervalo de convergencia $I = (-1, 1)$

En $x = 1$: $g(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ Serie alternada por el criterio de Leibniz es convergente

En $x = -1$: $g(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ convergente

c) ¿Cuál es la suma de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$?

Solución:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln(1+x^2) = \ln 2$$

i+A. Academia de Ingenierías y Arquitectura.

<http://imasagrados.blogspot.com> Tlf: 976 51 28 39. WhatsApp: 616 394 605

<http://imasagrados.blogspot.com>
info@imasaformacion.com

La **Academia de Ingenierías y Arquitectura i+A** nace en 1998 con el nombre de ATU (Academia Técnica Universitaria), que conservó hasta el curso 2014/2015. Desde entonces, hemos estado apoyando a los estudiantes de las titulaciones de Ingeniería y Arquitectura a superar sus exámenes y a acabar con éxito sus estudios.

Nuestros cursos duran 30 o 35 horas, dependiendo de la asignatura. Los grupos tienen **entre 4 y 8 alumnos**, por lo que se compatibiliza el aprendizaje mutuo con una gran atención personalizada.

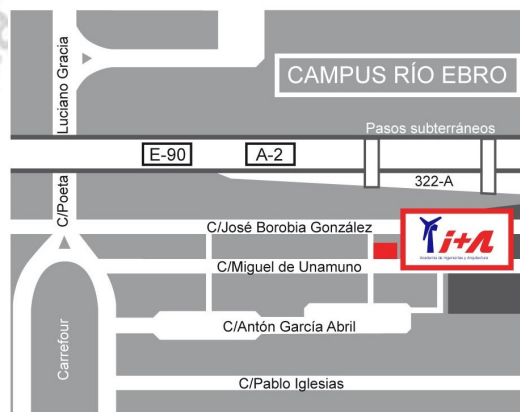
Contamos con una plantilla de profesorado compuesta por **jóvenes titulados** en Matemáticas, Física, Química y diferentes ramas de Ingeniería y Arquitectura, que conocen los temarios y tienen experiencia lectiva. Además disponemos de material recopilado durante todos estos años que actualizamos en cada curso: ejercicios, exámenes, apuntes, resúmenes, ...

En la Academia i+A, los horarios los ponéis el alumnado, para **adaptarlo a vuestras necesidades** (clases, actividades, deportes, trabajos...). Para ello, abrimos de 8:00 a 22:00 ininterrumpidamente.

Además de ser **la academia más cercana a la EINA**, a pocos minutos andando de tu centro de estudio, contamos con instalaciones acondicionadas tanto en invierno como en verano y un aula de descanso donde podrás incluso comer si lo necesitas.

Con las clases universitarias, tu esfuerzo, y la ayuda que te prestaremos en i+A, puedes superar tus estudios con éxito.

Se forman nuevos grupos continuamente y durante todo el cuatrimestre. Si quieres tener la información más actualizada, llámanos, mándanos un WhatsApp al 616394605 o navega por nuestro blog en <http://imasagrados.blogspot.com>



C/ Miguel de Unamuno, 17-21 local
50018 Zaragoza
Tel/Fax: 976 512 839
info@imasaformacion.com
www.imasaformacion.com